1 **El período de rotación de la Tierra alrededor del Sol es un año y el radio de la órbita es 1,5×10¹¹ m. Si Júpiter tiene un período de aproximadamente 12 años, y si el radio de la órbita de Neptuno es de 4,5×10¹² m, calcula:**

a) El radio de la órbita de Júpiter.

b) El período del movimiento orbital de Neptuno.

(P.A.U. Set. 05)

Rta.: a) $r_{oJ} = 7{,}8\times10^{11}$ m b) $T_N = 165$ años

$$\frac{(1\ [\text{año}])^2}{(1{,}5\times10^{11}\ [\text{m}])^3} = \frac{(12\ [\text{años}])^2}{r_{oJ}^3}$$

$$r_{oJ} = 1{,}5\times10^{11}[\text{m}]\sqrt[3]{12^2} = 7{,}8\times10^{11}\ \text{m}$$

Análisis: El resultado está comprendido entre las distancias Sol-Tierra y Sol-Neptuno:

$$(r_{oT} = 1{,}5\times10^{11}\ \text{m}) < (r_{oJ} = 7{,}8\times10^{11}\ \text{m}) < (r_{oN} = 4{,}5\times10^{12}\ \text{m})$$

b) Aplicando la misma ley entre la Tierra y Neptuno

$$\frac{(1\ [\text{año}])^2}{(1{,}5\times10^{11}\ [\text{m}])^3} = \frac{T_N^2}{(4{,}5\times10^{12}\ [\text{m}])^3}$$

$$T_N = 1\ [\text{año}]\sqrt{30^3} = 1{,}6\times10^2\ \text{años}$$

2 **La distancia Tierra-Luna es aproximadamente 60 R_T, siendo R_T el radio de la Tierra, igual a 6 400 km. Calcula:**

a) La velocidad lineal de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra.

b) El correspondiente período de rotación en días.

Datos. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; masa de la Tierra: $M = 5{,}98\times10^{24}$ kg ***(P.A.U. Set. 96)***

Rta.: a) $v = 1{,}0\times10^3$ m/s; b) $T = 27$ días

$$m_L \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G\frac{M_T m_L}{r_{\text{órb}}^2}$$

Despejando la velocidad v y sustituyendo los datos,

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\ [\text{kg}]}{3{,}8\times10^8\ [\text{m}]}} = 1{,}0\times10^3\ \text{m/s} = 1{,}0\ \text{km/s}$$

b) Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T = \frac{2\pi r_{\text{órb}}}{v} = \frac{2\pi\, 3{,}8\times10^8\ [\text{m}]}{1{,}0\times10^3\ [\text{m/s}]} = 2{,}4\times10^6\ \text{s} = 27\ \text{días}$$

3 **Se desea poner en órbita un satélite artificial a una altura de 300 km de la superficie terrestre. Calcula:**

a) La velocidad orbital que se le ha de comunicar al satélite.

b) El período de rotación.

Datos: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $R_T = 6{,}38\times10^6$ m; $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ***(P.A.U. Jun. 99)***

Rta.: a) $v_o = 7{,}73$ km/s; b) $T = 1{,}50$ horas

$$v=\sqrt{\frac{G\,M_T}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\,[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot5{,}98\times10^{24}\,[\text{kg}]}{6{,}68\times10^6\,[\text{m}]}}=7{,}73\times10^3\ \text{m/s}=7{,}73\ \text{km/s}$$

$$T=\frac{2\pi\,r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\pi\,6{,}68\times10^{6}\ [\text{m}]}{7{,}73\times10^3\ [\text{m/s}]}=5{,}42\times10^3\ \text{s}=1\ \text{h}\,30\ \text{min}$$

4 **Europa, satélite de Júpiter, fue descubierto por Galileo en 1610. Sabiendo que el radio de la órbita que describe es de $6{,}7\times10^5$ km y su período de 3 días, 13 horas y 13 minutos, calcula:**

a) La velocidad de Europa relativa a Júpiter.

b) La masa de Júpiter.

Datos. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻² ***(P.A.U. Set. 97)***

Rta.: a) $v = 1{,}4\times10^4$ m/s; b) $M_J = 1{,}9\times10^{27}$ kg

Cifras significativas: 2

$r_{\text{órb}} = 6{,}7\times10^5$ km $= 6{,}7\times10^8$ m

$T = 3$ d 13h 13 min $= 3{,}07\times10^5$ s

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

$$v=\frac{2\pi\,r_{\text{órb}}}{T}=\frac{2\pi\,6{,}7\times10^8\ [\text{m}]}{3{,}07\times10^5\ [\text{s}]}=1{,}4\times10^4\ \text{m/s}$$

$$M=\frac{v^2\cdot r_{\text{órb}}}{G}=\frac{(1{,}4\times10^4\ [\text{m/s}])^2\cdot6{,}7\times10^8\,[\text{m}]}{6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]}=1{,}9\times10^{27}\ \text{kg}$$

5 **La luz del Sol tarda 5×10^2 s en llegar a la Tierra y $2{,}6\times10^3$ s en llegar a Júpiter. Calcula:**

a) El período de Júpiter orbitando alrededor del Sol.

b) La velocidad orbital de Júpiter.

c) La masa del Sol.

Datos: T_{Tierra} alrededor del Sol: $3{,}15\times10^7$ s; $c = 3\times10^8$ m/s; $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻². (Se suponen las órbitas circulares) ***(P.A.U. Set. 12)***

Rta.: a) $T_J = 3{,}74\times10^8$ s; $v = 1{,}31\times10^4$ m/s; b) $M = 2{,}01\times10^{30}$ kg

Cifras significativas: 3

$t_T = 5{,}00\times10^2$ s $= 500$ s

$t_J = 2{,}60\times10^3$ s

$T_T = 3{,}15\times10^7$ s

$c = 3{,}00\times10^8$ m/s

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

$$r_T = c\cdot t_T = 3{,}00\times10^8\ [\text{m/s}]\cdot5{,}00\times10^2\ [\text{s}] = 1{,}50\times10^{11}\ \text{m}$$

$$r_J = c\cdot t_J = 3{,}00\times10^8\ [\text{m/s}]\cdot2{,}60\times10^3\ [\text{s}] = 7{,}80\times10^{11}\ \text{m}$$

$$v_T=\frac{2\pi\cdot r_T}{T}=\frac{2\pi\cdot1{,}50\times10^{11}\ [\text{m}]}{3{,}15\times10^7\ [\text{s}]}=2{,}99\times10^4\ \text{m/s}$$

$$M_S=\frac{v_T^2\cdot r_T}{G}=\frac{(2{,}99\times10^4\ [\text{m/s}])^2\cdot1{,}50\times10^{11}\ [\text{m}]}{6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]}=2{,}01\times10^{30}\ \text{kg}$$

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r_J}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot2{,}01\times10^{30}\ [\text{kg}]}{7{,}80\times10^{11}\ [\text{m}]}}=1{,}31\times10^4\ \text{m/s}=13{,}1\ \text{km/s}$$

$$T_J=\frac{2\pi\cdot r_J}{v}=\frac{2\pi\cdot 7{,}80\times10^{11}\,[\mathrm{m}]}{1{,}31\times10^4\,[\mathrm{m/s}]}=3{,}74\times10^8\ \mathrm{s}$$

$$T_J=T_T\sqrt{\frac{r_J^3}{r_T^3}}=3{,}15\times10^7\,[\mathrm{s}]\cdot\sqrt{\frac{(7{,}8\times10^{11}\,[\mathrm{m}])^3}{(1{,}5\times10^{11}\,[\mathrm{m}])^3}}=3{,}74\times10^8\ \mathrm{s}$$

6. La menor velocidad de giro de un satélite en la Tierra, conocida como primera velocidad cósmica, es la que se obtendría para un radio orbital igual al radio terrestre R_T. Calcula:

a) La primera velocidad cósmica.

b) El período de revolución correspondiente.

Datos: G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²; R_T = 6,38×10⁶ m; M_T = 5,98×10²⁴ kg ***(P.A.U. Jun. 98)***

Rta.: a) v_1 = 7,91 km/s; b) T = 1 h 24 min.

Cifras significativas: 3

$R_T = 6{,}38\times10^6$ m

$r_{\text{órb}} = R_T = 6{,}38\times10^6$ m

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]}{6{,}38\times10^6\,[\mathrm{m}]}}=7{,}91\times10^3\ \mathrm{m/s}=7{,}91\ \mathrm{km/s}$$

$$T=\frac{2\pi\cdot r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\pi\cdot R_T}{v}=\frac{2\pi\cdot 6{,}38\times10^6\,[\mathrm{m}]}{7{,}91\times10^3\,[\mathrm{m/s}]}=5{,}07\times10^3\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$$

7. Un satélite artificial con una masa de 200 kg se mueve en una órbita circular a 5×10⁷ m sobre la superficie terrestre.

a) ¿Qué fuerza gravitatoria actúa sobre el satélite?

b) ¿Cuál es el período de rotación del satélite?

Datos: g_0 = 9,81 m/s²; R_T = 6 370 km ***(P.A.U. Jun. 00)***

Rta.: a) F = 25,1 N; b) T = 37,0 horas

Cifras significativas: 3

R_T = 6 370 km = $6{,}37\times10^6$ m

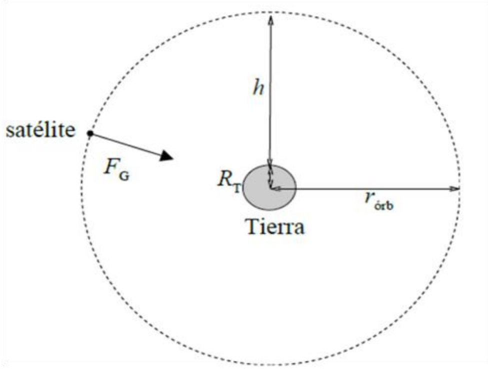
$h = 5{,}00\times10^7$ m

$g_0 = 9{,}81$ m/s²

m = 200 kg

a) El radio de la órbita vale:

$$r_{\text{órb}} = R_T + h = 6{,}37\times10^6\,[\mathrm{m}] + 5{,}00\times10^7\,[\mathrm{m}] = 5{,}64\times10^7\ \mathrm{m}$$



$$m\,g_0=G\frac{M_T\,m}{R_T^2}$$

$$G\,M_T = g_0\,R_T^2$$

$$F_G=G\frac{M_T\,m}{r_{\text{órb}}^2}=\frac{g_0\,R_T^2\,m}{r_{\text{órb}}^2}=\frac{9{,}81\,[\mathrm{m/s^2}](6{,}37\times10^6\,[\mathrm{m}])^2\cdot 200\,[\mathrm{kg}]}{(5{,}64\times10^7\,[\mathrm{m}])^2}=25{,}1\ \mathrm{N}$$

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2} \qquad v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}}=\frac{2\pi r_{\text{órb}}}{T}$$

$$\left(\frac{2\pi r_{\text{órb}}}{T}\right)^2=\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}} \quad T=2\pi\sqrt{\frac{(5{,}64\times10^7\ [\text{m}])^3}{9{,}81\ [\text{m/s}^2](6{,}37\times10^6\ [\text{m}])^2}}$$

$$=1{,}33\times10^5\ \text{s}=37{,}0\ \text{horas}$$

8 **Un astronauta de 75 kg gira alrededor de la Tierra (dentro de un satélite artificial) en una órbita situada a 10 000 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:**

a) La velocidad orbital y el período de rotación.

b) El peso del astronauta en esa órbita.

Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_T = 6 400 km ***(P.A.U. Set. 02***

Rta.: a) $v = 4{,}95\times10^3$ m/s; $T = 2{,}08\times10^4$ s; b) $P_h = 1{,}1\times10^2$ N

R_T = 6 400 km = $6{,}40\times10^6$ m
h = 10 000 km = $1{,}00\times10^7$ m
g_0 = 9,80 m/s²
m = 75,0 kg

$$r_{\text{órb}} = R_T + h = 6{,}40\times10^6\ [\text{m}] + 1{,}00\times10^7\ [\text{m}] = 1{,}64\times10^7\ \text{m}$$

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2} \qquad m g_0=G\frac{M_T m}{R_T^2} \qquad G M_T = g_0 R_T^2$$

$$v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}40\times10^6\ [\text{m}])^2}{1{,}64\times10^7\ [\text{m}]}}=4{,}95\times10^3\ \text{m/s}=4{,}95\ \text{km/s}$$

$$T=\frac{2\pi r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\pi\cdot1{,}64\times10^6\ [\text{m}]}{4{,}95\times10^3\ [\text{m/s}]}=2{,}08\times10^4\ \text{s}=5\ \text{h}\ 47\ \text{min} \qquad P_h=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}=\frac{g_0 R_T^2 m}{r_{\text{órb}}^2}=$$

$$=\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}40\times10^6\ [\text{m}])^2\cdot75{,}0[\text{kg}]}{(1{,}64\times10^7\ [\text{m}])^2}=112\ \text{N}$$

9 **Un satélite artificial de 64,5 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio R = 2,32 R_T. Calcula:**

a) El período de rotación del satélite.

b) El peso del satélite en la órbita.

Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_T = 6 370 km ***(P.A.U***

Rta.: a) T = 4 h 58 min.; b) P_h = 117 N

R_T = 6 370 km = $6{,}37\times10^6$ m
$r_{\text{órb}}$ = 2,32 R_T = $1{,}48\times10^7$ m
g_0 = 9,80 m/s²
m = 64,5 kg

$$r_{\text{órb}} = 2{,}32\ R_T = 1{,}48\times10^7\ \text{m}$$

$$v=\sqrt{\frac{G\,M_{\mathrm{T}}}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{g_0\,R_{\mathrm{T}}^2}{r_{\text{órb}}}}=\frac{2\,\pi\,r_{\text{órb}}}{T} \qquad \left(\frac{2\,\pi\,r_{\text{órb}}}{T}\right)^2=\frac{g_0\,R_{\mathrm{T}}^2}{r_{\text{órb}}} \qquad T=2\,\pi\sqrt{\frac{r_{\text{órb}}^3}{g_0\,R_{\mathrm{T}}^2}}$$

$$T=2\,\pi\sqrt{\frac{(1{,}84\times10^7\;[\mathrm{m}])^3}{9{,}80\;[\mathrm{m/s^2}](6{,}37\times10^6\;[\mathrm{m}])^2}}=1{,}79\times10^4\;\mathrm{s}=4\;\mathrm{h}\;58\;\mathrm{min}$$

$$P_{\mathrm{h}}=F_{\mathrm{G}}=G\frac{M_{\mathrm{T}}\,m}{r_{\text{órb}}^2}=\frac{g_0\,R_{\mathrm{T}}^2\,m}{r_{\text{órb}}^2}=\frac{9{,}80\;[\mathrm{m/s^2}](6{,}37\times10^6\;[\mathrm{m}])^2\cdot 64{,}5\;[\mathrm{kg}]}{(1{,}84\times10^7\;[\mathrm{m}])^2}=117\;\mathrm{N}$$

10 Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a una altura de 6 000 km sobre la superficie de la Tierra. Calcula:

a) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa.

b) El peso del satélite a esa altura.

Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_T = 6 400 km ***(P.A.U. Jun. 06)***

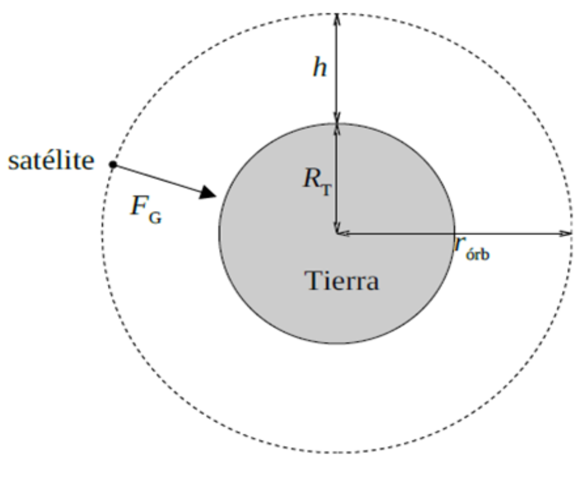
Rta.: a) T = 3 h 48 min.; b) P_h = 261 N

R_T = 6 400 km = 6,40×10⁶ m
h = 6 000 km = 6,00×10⁶ m
g_0 = 9,80 m/s²
m = 100 kg

Solución:

$r_{\text{órb}} = R_T + h = 6{,}40\times10^6\;[\mathrm{m}] + 6{,}00\times10^6\;[\mathrm{m}] = 1{,}24\times10^7\;\mathrm{m}$

$G\,M_T = g_0\,R_T^2 = 4{,}01\times10^{14}\;\mathrm{m^3/s^2}$



$$v=\sqrt{\frac{G\,M_{\mathrm{T}}}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{g_0\,R_{\mathrm{T}}^2}{r_{\text{órb}}}}:=\sqrt{\frac{4{,}01\times10^{12}\;[\mathrm{m^3/s^2}]}{1{,}24\times10^7\;[\mathrm{m}]}}:$$

$$=5{,}69\times10^3\;\mathrm{m/s}$$

$$v=\frac{2\,\pi\,r_{\text{órb}}}{T} \qquad T=\frac{2\,\pi\,r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\,\pi\,1{,}24\times10^7\;[\mathrm{m}]}{5{,}69\times10^3\;[\mathrm{m/s}]}$$

$$=1{,}37\times10^4\;\mathrm{s}=3\;\mathrm{h}\;48\;\mathrm{min}$$

$$P_{\mathrm{h}}=F_{\mathrm{G}}=G\frac{M_{\mathrm{T}}\,m}{r_{\text{órb}}^2}=\frac{g_0\,R_{\mathrm{T}}^2\,m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$=\frac{4{,}01\times10^{12}\;[\mathrm{m^3/s^2}]\cdot 100\;[\mathrm{kg}]}{(1{,}24\times10^7\;[\mathrm{m}])^2}=261\;\mathrm{N}$$

11 **Un satélite artificial de 500 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un radio de 2×10^4 km. Calcula:**

a) La velocidad orbital y el período.

b) La energía mecánica y la potencial.

c) Si por fricción se pierde algo de energía, ¿qué le ocurre al radio y a la velocidad?

Datos $g_0 = 9{,}8\ \text{m·s}^{-2}$; $R_T = 6\ 370$ km ***(P.A.U. Set. 10)***

Rta.: a) $v = 4{,}5$ km/s; $T = 7{,}8$ h; b) $E = -5{,}0\times10^9$ J; $E_p = -9{,}9\times10^9$ J

$m = 500$ kg
$r_{\text{órb}} = 2{,}00\times10^4\ \text{km} = 2{,}00\times10^7$ m
$g_0 = 9{,}80\ \text{m/s}^2$
$R_T = 6\ 370\ \text{km} = 6{,}37\times10^6$ m

$$v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2]\cdot(6{,}37\times10^6\ [\text{m}])^2}{2{,}00\times10^7\ [\text{m}]}}$$

$$=4{,}46\times10^3\ \text{m/s}=4{,}46\ \text{km/s}$$

$$T=\frac{2\pi\, r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\pi\, 2{,}00\times10^7\ [\text{m}]}{4{,}46\times10^3\ [\text{m/s}]}=2{,}82\times10^4\ \text{s}=7\ \text{h}\ 50\ \text{min}$$

$$E_c = ½\, m \cdot v^2 = [500\ [\text{kg}] \cdot (4{,}46\times10^3\ [\text{m/s}])^2] / 2 = 4{,}97\times10^9\ \text{J}$$

$$E = E_c + E_p = 4{,}97\times10^9\ [\text{J}] + (-9{,}94\times10^9\ [\text{J}]) = -4{,}97\times10^9\ \text{J}$$

12 **Se desea poner en órbita un satélite de 1 800 kg que gire a razón de 12,5 vueltas por día. Calcula:**

a) El período del satélite.

b) La distancia del satélite a la superficie terrestre.

c) La energía cinética del satélite en esa órbita.

Datos: $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$; $R_T = 6\ 378$ km; $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg ***(P.A.U. Set. 09)***

Rta.: a) $T = 1{,}92$ h b) $h = 1\ 470$ km c) $E_C = 4{,}58\times10^{10}$ J

$R_T = 6\ 378\ \text{km} = 6{,}38\times10^6$ m
$f = 12{,}5\ \text{vueltas/día} = 1{,}45\times10^{-4}$ Hz
$G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N·m}^2\text{·kg}^{-2}$
$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg
$m = 1\ 800$ kg

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{1{,}45\times10^{-4}\ [\text{Hz}]}=6{,}91\times10^3\ \text{s}=1{,}92\ \text{h}$$

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}\qquad v^2=G\frac{M_T}{r_{\text{órb}}}\qquad \frac{4\pi^2 r_{\text{órb}}^2}{T^2}=G\frac{M_T}{r_{\text{órb}}}$$

$$r_{\text{órb}}=\sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}}=7{,}84\times10^6\ \text{m}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\ [\text{kg}]\cdot(6{,}91\times10^3\ [\text{s}])^2}{4\pi^2}}$$

$$h = r_{\text{órb}} - R_T = 7{,}84\times10^6\ [\text{m}] - 6{,}38\times10^6\ [\text{m}]$$

$$= 1{,}47\times10^6\ \text{m} = 1\ 470\ \text{km}$$

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}=\frac{2\pi\cdot 7{,}86\times10^6\ [\text{m}]}{6{,}91\times10^3\ [\text{s}]}=7{,}13\times10^3\ \text{m/s}$$

$$E_c = ½\, m \cdot v^2 = [1{,}80\times10^3\ [\text{kg}] \cdot (7{,}13\times10^3\ [\text{m/s}])^2] / 2$$

$$= 4{,}58\times10^{10}\ \text{J}$$

13 **Un satélite artificial con una masa de 200 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad constante de 10 800 km/h. Calcula:**

a) ¿A qué altura está situado?

b) Haz un gráfico indicando qué fuerzas actúan sobre el satélite y calcula la energía total.

Datos: g_0 = 9,8 m/s²; R_T = 6 370 km ***(P.A.U. Set. 01)***

Rta.: a) $h = 3{,}8\times10^7$ m; b) $E = -9{,}0\times10^8$ J

$R_T = 6\,370$ km $= 6{,}37\times10^6$ m

$v = 10\,800$ km/h $= 3{,}00\times10^3$ m/s

$g_0 = 9{,}80$ m/s²

$m = 200$ kg

$$m\,g_0 = G\frac{M_T m}{R_T^2} \qquad G M_T = g_0 R_T^2$$

$$r_{órb} = \frac{G M_T}{v^2} = \frac{g_0 R_T^2}{v^2} = \frac{9{,}80\,[\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\times10^6\,[\mathrm{m}])^2}{3{,}00\times10^3\,[\mathrm{m/s}]} = 4{,}43\times10^7\ \mathrm{m}$$

$$h = r_{órb} - R_T = 4{,}43\times10^7\,[\mathrm{m}] - 6{,}37\times10^6\,[\mathrm{m}] = 3{,}79\times10^7\ \mathrm{m}$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\,v_{órb}^2 + \left(-G\frac{M_T m}{r_{órb}}\right) = \frac{1}{2}m\,v_{órb}^2 - \frac{g_0 R_T^2 m}{r_{órb}}$$

$$E = \frac{1}{2}\cdot 200\,[\mathrm{kg}](3{,}00\times10^3\,[\mathrm{m/s}])^2 - \frac{9{,}80\,[\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}37\times10^6\,[\mathrm{m}])^2\cdot 200\,[\mathrm{kg}]}{4{,}43\times10^7\,[\mathrm{m}]} =$$

$$= -9{,}00\times10^8\ \mathrm{J}$$

14 **Se desea poner en órbita un satélite geoestacionario de 25 kg. Calcula:**

a) El radio de la órbita.

b) Las energías cinética, potencial y total del satélite en la órbita.

Datos. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²; $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

Rta.: a) $r = 4{,}23\times10^7$ m; b) $E_c = 1{,}18\times10^8$ J; $E_p = -2{,}36\times10^8$ J; $E = -1{,}18\times10^8$ J

$T = 24$ h $= 8{,}64\times10^4$ s

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$m = 25{,}0$ kg

$$v^2 = G\frac{M_T}{r_{órb}} \qquad \frac{4\pi^2 r_{órb}^2}{T^2} = G\frac{M_T}{r_{órb}} \qquad r_{órb} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}](8{,}64\times10^4\,[\mathrm{s}])^2}{4\pi^2}} = 4{,}23\times10^7\ \mathrm{m}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_{órb}} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]\cdot 25{,}0\,[\mathrm{kg}]}{2\cdot 4{,}23\times10^7\,[\mathrm{m}]} = 1{,}18\times10^8\ \mathrm{J}$$

$$E_p = -G\frac{M_T\cdot m}{r_{órb}} = \frac{-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]\cdot 25{,}0\,[\mathrm{kg}]}{4{,}23\times10^7\,[\mathrm{m}]} = -2{,}36\times10^8\ \mathrm{J}$$

$$E = E_c + E_p = 1{,}18\times10^8\,[\mathrm{J}] - 2{,}36\times10^8\,[\mathrm{J}] = -1{,}18\times10^8\ \mathrm{J}$$

$$m\frac{v^2}{r_{órb}} = G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

15 **Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios (situados sobre el ecuador terrestre y con período orbital de un día). Calcula:**

a) La altura a la que se encuentran, respecto a la superficie terrestre.

b) La fuerza ejercida sobre el satélite.

c) La energía mecánica.

Datos: $R_T = 6{,}38\cdot10^6$ **m;** $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ **kg;** $m_{sat} = 8\cdot10^2$ **kg;** $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ **N·m²·kg⁻²** ***(P.A.U. Set. 08)***

Rta.: a) $h = 3{,}60\times10^7$ m; b) $F = 179$ N ; c) $E_c = -3{,}78\times10^9$ J; $E_p = -7{,}56\times10^9$ J; $E = -3{,}78\times10^9$ J

Solución:

$T = 24$ h $= 8{,}64\times10^4$ s

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$m = 8{,}00\times10^2$ kg

$R_T = 6{,}38\times10^6$ m

$$m\frac{v^2}{r_{órb}}=G\frac{M_T m}{r_{órb}^2} \qquad v^2=G\frac{M_T}{r_{órb}} \qquad r_{órb}=\sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}](8{,}64\times10^4\,[\mathrm{s}])^2}{4\pi^2}}=4{,}23\times10^7\ \mathrm{m}$$

$$h = r_{órb} - R_T = 4{,}24\times10^7 - 6{,}38\times10^6 = 3{,}60\times10^7\ \mathrm{m} \qquad F_G=G\frac{M_T m}{r_{órb}^2}$$

$$=\frac{6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]\cdot 800\,[\mathrm{kg}]}{(4{,}23\times10^7\,[\mathrm{m}])^2}=179\ \mathrm{N}$$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r_{órb}}=\frac{6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]\cdot 800\,[\mathrm{kg}]}{2\cdot 4{,}23\times10^7\,[\mathrm{m}]}=3{,}78\times10^9\ \mathrm{J}$$

$$E_p=-G\frac{M_T m}{r_{órb}}=\frac{-6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]\cdot 800\,[\mathrm{kg}]}{4{,}23\times10^7\,[\mathrm{m}]}=-7{,}56\times10^9\ \mathrm{J}$$

$$E = E_c + E_p = 3{,}78\times10^9\,[\mathrm{J}] - 7{,}56\times10^9\,[\mathrm{J}] = -3{,}78\times10^9\ \mathrm{J}$$

16 **Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular a una altura de 650 km sobre la Tierra. Calcula:**

a) El periodo y la velocidad del satélite en la órbita.

b) La energía mecánica del satélite.

c) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Datos: $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ **kg;** $R_T = 6{,}37\times10^6$ **m;** $G = 6{,}67\times10^{-11}$ **N·m²·kg⁻²** ***(P.A.U. Set. 11)***

Rta.: a) $v = 7{,}54$ km/s; $T = 1$ h 38 min; b) $E = -5{,}68\times10^9$ J; c) $g_h / g_0 = 0{,}823$

Solución:

$m = 200$ kg

$h = 650$ km $= 6{,}50\times10^5$ m

$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

$R_T = 6{,}37\times10^6$ m

$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

$$r_{órb} = R_T + h = 6{,}37\times10^6\,[\mathrm{m}] + 6{,}50\times10^5\,[\mathrm{m}] = 7{,}02\times10^6\ \mathrm{m}$$

$$v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{órb}}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]}{7{,}02\times10^6\,[\mathrm{m}]}}$$

$$=7{,}54\times10^3\ \mathrm{m/s}=7{,}54\ \mathrm{km/s}$$

$$T=\frac{2\pi\cdot r_{órb}}{v}=\frac{2\pi\cdot r_{órb}}{v}=\frac{2\pi\cdot 7{,}02\times10^6\,[\mathrm{m}]}{7{,}54\times10^3\,[\mathrm{m/s}]}=5{,}85\times10^3\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}\ 38\ \mathrm{min}$$

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r_{órb}} = \frac{6,67\times10^{-11}\ [N\cdot m^2\cdot kg^{-2}]\cdot 5,98\times10^{24}\ [kg]\cdot 200\ [kg]}{7,02\times10^6 [m]} = -1,14\times10^{10}\ J$$

$$E_c = 1/2\ m\ v^2 = [200\ [kg]\ (7,54\times10^3\ [m/s])^2]\ /\ 2 = 5,68\times10^9\ J$$

$$E = E_c + E_p = 5,68\times10^9\ [J] + (-\ 1,14\times10^{10}\ [J]) = -5,68\times10^9\ J$$

$$g = \frac{F_G}{m} = \frac{G\frac{M_T\cdot m}{r^2}}{m} = G\frac{M_T}{r^2} \qquad g_h = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \qquad g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} = \frac{(6,37\times10^6\ [m])^2}{(7,02\times10^6\ [m])^2} = 0,823$$

17 **Un satélite artificial de 300 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de 36 378 km de radio. Calcula:**

a) La velocidad del satélite en la órbita.

b) La energía total del satélite en la órbita.

Datos: g_0 = 9,80 m/s²; R_T = 6 378 km ***(P.A.U. Jun. 03)***

Rta.: a) v = 3,31 km/s; b) E = -1,64×10⁹ J

Solución:

R_T = 6 378 km = 6,38×10⁶ m
$r_{órb}$ = 36 378 km = 3,64×10⁷ m
g_0 = 9,80 m/s²
m = 300 kg

$$m\,g_0 = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G\,M_T = g_0\,R_T^2$$

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{órb}}}$$

$$= \sqrt{\frac{9,80\ [m/s^2]\cdot(6,38\times10^6\ [m])^2}{3,64\times10^7\ [m]}} = 3,31\times10^3\ m/s = 3,31\ km/s$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m v_{órb}^2 + \left(-G\frac{M_T m}{r_{órb}}\right) = \frac{1}{2}m v_{órb}^2 - \frac{g_0 R_T^2 m}{r_{órb}}$$

$$E = \frac{1}{2}\cdot 300\ [kg](3,31\times10^3\ [m/s])^2 - \frac{9,80\ [m/s^2]\cdot(6,38\times10^6\ [m])^2\cdot 300\ [kg]}{3,64\times10^7\ [m]}$$

$$= -1,64\times10^9\ J$$

18 **Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre:**
a) Deduce la expresión de la velocidad orbital.
b) Calcula el período de giro.
c) Calcula la energía mecánica.
Datos: R_T = 6 400 km; g_0 = 9,81 m/s² ***(P.A.U***

Rta.: a) $v=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{órb}}}$; b) T = 1 h 37 min; b) E = -5,74×10⁹ J

Solución:

m = 200 kg
h = 600 km = 6,00×10⁵ m
R_T = 6 400 km = 6,40×10⁶ m
g_0 = 9,81 m/s²

$r_{órb} = R_T + h$ = 6,40×10⁶ [m] + 6,00×10⁵ [m] = 7,00×10⁶ m

$$m\frac{v^2}{r_{órb}}=G\frac{M_T m}{r_{órb}^2} \qquad v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{órb}}} \qquad m\,g_0=G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G M_T = g_0 R_T^2 \qquad v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{órb}}}=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{órb}}}=7{,}58\times 10^3\ \mathrm{m/s}=7{,}58\ \mathrm{km/s}$$

$$T=\frac{2\pi\cdot r_{órb}}{v}=\frac{2\pi\cdot 7{,}00\times 10^6\ [\mathrm{m}]}{7{,}58\times 10^3\ [\mathrm{m/s}]}=5{,}81\times 10^3\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{h}\ 37\ \mathrm{min}$$

$$E_p=-G\frac{M_T m}{r_{órb}}=\frac{g_0 R_T^2 m}{r_{órb}}=\frac{9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}]\cdot(6{,}40\times 10^6\ [\mathrm{m}])^2\cdot 200\ [\mathrm{kg}]}{7{,}00\times 10^6\ [\mathrm{m}]}=-1{,}15\times 10^{10}\ \mathrm{J}$$

$$E_c = 1/2\ m\ v^2 = [200\ [\mathrm{kg}]\ (7{,}58\times 10^3\ [\mathrm{m/s}])^2]\ /\ 2 = 5{,}74\times 10^9\ \mathrm{J}$$

$$E = E_c + E_p = 5{,}74\times 10^9\ [\mathrm{J}] - 1{,}15\times 10^{10}\ [\mathrm{J}] = -5{,}74\times 10^9\ \mathrm{J}$$

19 **Se desea poner un satélite de masa 10³ kg en órbita alrededor de la Tierra y a una altura dos veces el radio terrestre. Calcula:**
a) La energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra.
b) La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita.
c) El periodo del satélite en dicha órbita.
Datos: R_T = 6 370 km; g_0 = 9,8 m/s² ***(P.A.U. Set. 13)***

Rta.: a) ΔE = 5,20×10¹⁰ J; b) F = 1,09×10³ N; c) T = 7 h 19 min

Solución:

m = 10³ kg = 1,00×10³ kg
R_T = 6 370 km = 6,37×10⁶ m
h = 2·6 370 km = 1,27×10⁷ m
g_0 = 9,80 m/s²

$$m\,g_0=G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$G M_T = g_0 R_T^2$$

$$E_p=-G\frac{M_T m}{r}=\frac{-g_0 R_T^2 m}{r}$$

$$E_{p\,s}=-G\frac{M_T m}{R_T}=\frac{g_0 R_T^2 m}{R_T}$$

$$=-g_0 R_T m=9{,}80\ [m/s^2]\cdot 6{,}37\times10^6\ [m]\cdot 1{,}00\times10^3\ [kg]=-6{,}24\times10^{10}\ J$$

$$E_{p\,o}=-G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}}=\frac{-g_0 R_T^2 m}{3R_T}=\frac{-g_0 R_T m}{3}=\frac{E_{p\,s}}{3}=\frac{-6{,}24\times10^{10}\ J}{3}=-2{,}08\times10^{10}\ J$$

$$v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}}=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{3R_T}}=\sqrt{\frac{g_0 R_T}{3}}=\sqrt{\frac{9{,}80\ [m/s^2]\cdot 6{,}37\times10^6\ [m]}{3}}=4{,}56\times10^3\ m/s=4{,}56\ km/s$$

$$E_{c\,o}=\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}m\frac{g_0 R_T}{3}=\frac{1}{6}1{,}00\times10^3\ [kg]\cdot 9{,}80\ [m/s^2]\cdot 6{,}37\times10^6\ [m]=1{,}04\times10^{10}\ J$$

$$E_o=E_{c\,o}+E_{p\,o}=1{,}04\times10^{10}\ [J]-2{,}08\times10^{10}\ [J]=-1{,}04\times10^{10}\ J$$

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie de la Tierra es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E=E_o-E_s=-1{,}04\times10^{10}-(-6{,}24\times10^{10}\ J)=5{,}20\times10^{10}\ J$$

$$F=m\cdot a_N=m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=m\frac{\frac{g_0 \cancel{R_T}}{3}}{3\cancel{R_T}}=\frac{m\,g_0}{9}=\frac{1{,}00\times10^3\ [kg]\cdot 9{,}80\ [m/s^2]}{9}=1{,}09\times10^3\ N$$

$$T=\frac{2\pi\cdot r_{\text{órb}}}{v}=\frac{2\pi\cdot 1{,}91\times10^7\ [m]}{7{,}58\times10^3\ [m/s]}=2{,}63\times10^4\ s=7\ h\ 18\ min$$

20 Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial de 3 km/s. Calcula:

a) ¿Qué altura máxima alcanzará?

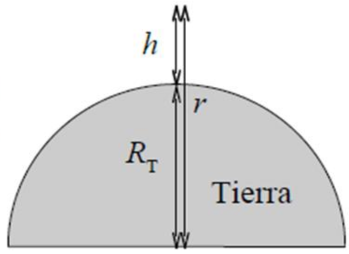
b) La velocidad orbital que habrá que comunicarle a esa altura para que describa una órbita circular.

Datos. $G=6{,}67\times10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; $R_T=6\,370$ km; $M_T=5{,}98\times10^{24}$ kg **(P.A.U. Jun. 01)**

Rta.: a) $h_{max}=490$ km; b) $v=7{,}62$ km/s

$R_T=6\,370\ km=6{,}37\times10^6\ m$
$G=6{,}67\times10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$
$M_T=5{,}98\times10^{24}\ kg$
$v_0=3{,}00\ km/s=3{,}00\times10^3\ m/s$
$g_0=9{,}80\ m/s^2$

Solución:



a) Como la fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, la energía mecánica del proyectil en el suelo será la misma que la que tendrá en el punto de altura máxima. En una primera aproximación, se supone que el valor de la gravedad se mantiene constante entre ambos puntos $g_h = g_0$. Entonces:

$$(E_c + E_p)_{\text{suelo}} = (E_c + E_p)_h$$

$$½\, m\, v_0^2 + m\, g_0\, h_0 = ½\, m\, v_h^2 + m\, g_h\, h$$

Tomando como origen de energía potencial el suelo, E_p (suelo) = 0, y sabiendo que en la altura máxima la velocidad será cero

$$½\, m\, v_0^2 = m\, g_0\, h$$

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2\, g_0} = \frac{(3{,}00 \times 10^3\ [\text{m/s}])^2}{2 \cdot 9{,}81\ [\text{m/s}^2]} = 4{,}59 \times 10^5\ \text{m} = 459\ \text{km}$$

Pero si calculamos el valor de la aceleración de la gravedad a esa altura, en la que

$$r = R + h = 6\,370\ [\text{km}] + 459\ [\text{km}] = 6\,829\ \text{km} = 6{,}829 \times 10^6\ \text{m}$$

por lo tanto, hay que utilizar la expresión de la energía potencial gravitatoria referida al infinito. Si $E_p(\infty) = 0$

$$(E_c + E_p)_{\text{suelo}} = (E_c + E_p)_h$$

$$\frac{1}{2} m\, v_0^2 + \left(-G \frac{M_T m}{R_T}\right) = -G \frac{M_T m}{r}$$

$$r = \frac{-G\, M_T}{\frac{1}{2} v_0^2 - G \frac{M_T}{R_T}} = \frac{-6{,}67 \times 10^{-11}\ [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \times 10^{24}\ [\text{kg}]}{\frac{1}{2}(3{,}00 \times 10^3\ [\text{m/s}])^2 - 6{,}67 \times 10^{-11}\ [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot \frac{5{,}98 \times 10^{24}\ [\text{kg}]}{6{,}37 \times 10^6\ [\text{m}]}} = 6{,}86 \times 10^6\ \text{m}$$

$$h = r - R_T = 6{,}86 \times 10^6\ [\text{m}] - 6{,}370 \times 10^6\ [\text{m}] = 4{,}9 \times 10^5\ \text{m} = 490\ \text{km}$$

b) Como la única fuerza sobre del satélite que actúa es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G\, M_T}{r_{\text{órb}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\ [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}] \cdot 5{,}98 \times 10^{24}\ [\text{kg}]}{6{,}86 \times 10^6\ [\text{m}]}} = 7{,}62 \times 10^3\ \text{m/s} = 7{,}62\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un objeto que se mueva alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado de 7,62 km/s está dentro del orden de magnitud.

a) Calcular el radio que debería tener la Tierra, conservando su masa, para que la velocidad de escape fuese igual que la de la luz, c = 300.000 km·s^{-1} (¡extraño agujero negro!)
b) Ante un colapso de este tipo ¿variará el período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra?
Datos: G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}; R_T= 6,38×10^6 m; M_T= 5,98×10^{24} kg ***(P.A.U. Jun. 97)***
Rta.: a) $R_T' = 8{,}9$ mm; b) no

$R_T = 6\,378$ km $= 6{,}38\times10^6$ m
$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
$M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg
$v_E = 300\,000$ km·s^{-1} $= 3{,}00\times10^8$ m/s

Solución:

a) Para conseguir que un cuerpo "escape" de la atracción gravitatoria, deberemos comunicarle una energía que permita situarlo en un punto en el que no esté sometido a dicha atracción. Esto ocurre a una distancia "infinita" del centro de la Tierra y en la que se cumple que $E_T = 0$.
Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a ambos puntos (superficie terrestre e infinito) resultará:

$$(E_c + E_p)_T = (E_c + E_p)_\infty$$

$$\frac{1}{2} m v_e^2 + \left(-G \frac{M_T m}{R'_T}\right) = 0$$

Despejando R'_T y sustituyendo:

$$R'_T = \frac{2\,G\,M_T}{v_e^2} = \frac{2 \cdot 6{,}67\times10^{-11}\,[\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 5{,}98\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]}{(3{,}00\times10^8\,[\mathrm{m/s}])^2} = 8{,}9\times10^{-3}\ \mathrm{m} = 8{,}9\ \mathrm{mm}$$

El radio de este «extraño» agujero negro coincide con su horizonte de sucesos. De alguna manera tiene sentido un radio tan pequeño, aunque no pueda existir. Los agujeros negros pueden formarse por el colapso gra-

$$m_L\, a = F_G$$

la Luna describe una trayectoria aproximadamente circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m \frac{v^2}{r_{\text{órb}}} = G \frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Como la velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.) es:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}} = \frac{2\pi r_{\text{órb}}}{T}$$

$$\left(\frac{2\pi r_{\text{órb}}}{T}\right)^2 = \frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_{\text{órb}}^3}{G M_T}}$$

que no depende del radio de la Tierra.